

## KÜTLƏVİ XİDMƏT SİSTEMLƏRİNDƏ GÖZLƏMƏ MÜDDƏTİNİ İFADƏ EDƏN BİR SİNİF FUNKSİONALLARIN MİNİMALLAŞDIRILMASI

**T.Ş.MƏMMƏDOV**  
*Bakı Dövlət Universiteti*  
 aypara111@mail.ru

*Kütləvi xidmət sistemlərində gözləmə müddətini ifadə edən bir sinif funksionalların minimallaşdırılması məsələlərinə baxılır. Baxılan funksionalın minimallaşdırılması üçün kafi şərtlər tapılır ki, kütləvi xidmət sistemlərində optimal idarəetməyə uyğun olur. Sadə hal üçün optimal idarəetmənin aşkar ifadəsi tapılır, mürəkkəb hal üçün isə optimal idarəetmənin tapılması üçün tənliklər sistemi qurulur və ədədi üsulla həll olunması yolu verilir.*

**Giriş.** Stoxastik idarəetmə sistemlərində müəyyən funksionalın minimallaşdırılması aktual problemlərdən biridir. Bu tip məsələlərə istehsalatda, iqtisadiyyatda, şəbəkə sistemlərində, informasiya sistemlərində və nəqliyyat məsələlərində rast gəlinir. İdarəetmə, həyata keçirildiyi ana qədər baş vermiş realizasiyaların funksiyası kimi, təsadüfi kəmiyyət olur. İdarəetmə sistemlərində əks əlaqəli idarəetmə vacib əhəmiyyət kəsb edir. Bu da idarəetmənin təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı kimi təyin olunmasına səbəb olur.

[3, 4, 5] işlərində bir neçə terminal arasında tələbləri daşıyan sonsuz həcmli xidmət qurğusunun terminallarda yubadılması ilə idarə etməklə xidmətin yaxşılaşdırılması məsələlərinə baxılır. Bu sistemin özünün idarə olunmayan  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n, \dots$  parametrləri var ki, onlar baxılan məsələdə xidmət qurğusunun uyğun dövrlərdə terminallar arasında gediş vaxtlarını ifadə edən təsadüfi kəmiyyətlərdir. Hər bir dövrdə də xidmət qurğusunun bir və ya bir neçə terminalda yubadılması ilə həyata keçirilən  $x_n, y_n$  mənfi olmayan idarəetmələr daxil olunur. Sistemdə tələblərin orta gözləmə müddətinin minimallaşdırılması aşağıdakı tipli funksionalların minimallaşdırılmasına gətirilir: bir terminalda idarəetmə olduqda

$$I_1(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(\xi_k + x_k + \eta_k)^2;$$

iki terminalda idarəetmə olduqda

$$I_2(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\alpha_1 E(\xi_k + x_k + \eta_k + y_k)^2 + \alpha_2 E(\eta_k + y_k + \xi_{k+1} + x_{k+1})^2]$$

Bu tip funksionalların minimallaşdırılması müəyyən çətinliklər yaradır ki, bu da optimal idarəetməni tapdıqda idarəetmənin asılı olduğu sistemin parametrlərinin – infor-

masiyanın təsadüfi və gələcəyə aid olması ilə bağlıdır. Bir neçə terminalda idarəetmə həyata keçirildikdə isə başqa bir problem alınan inteqral tənliklər sisteminin kifayət qədər mürəkkəb olması ilə bağlıdır.

Təqdim olunan işdə qeyd olunan problemlərin həlli üsulu təklif olunmuşdur.

**1. Sadə hal.** Fərz olunur ki, müəyyən stoxastik idarəetmə sistemində asılı olmayan, sonlu ikinci tərtib momentlərə malik  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n, \dots$  təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilir:  $E\xi_n^2 < \infty, E\eta_n^2 < \infty$ . Burada  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  eyni bir  $F_1$  paylanmasına,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$  təsadüfi kəmiyyətləri də həmçinin eyni bir  $F_2$  paylanmasına malikdir. Sistemdə əks əlaqəli mənfə olmayan idarəetmələr ardıcılığı  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ,  $Ex_n^2 < \infty$  həyata keçirmək olar ki, realizasiyalar ardıcılığı

$$\xi_1 \rightarrow x_1 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow x_2 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_n \rightarrow x_n \rightarrow \eta_n \rightarrow \dots$$

şəklində olur. Burada stoxastik idarəetmə sistemlərinə xas olaraq şərt qoyulur ki, hər bir idarəetmə ( $x_k$ -lar) yalnız özündən əvvəl baş verən realizasiyalardan asılı ola bilər və sonrakı realizasiyalardan asılı deyil, yəni hər bir  $n \in N$  nömrəsi üçün  $x_n$  təsadüfi kəmiyyəti  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n$  təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır,  $\eta_n, \xi_{n+1}, \eta_{n+1}, \dots$  təsadüfi kəmiyyətlərindən isə asılı deyil.

$X = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_n \geq 0\}$  idarəetmələr sinfində aşağıdakı funksionala baxaq:

$$I_1(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(\xi_k + x_k + \eta_k)^2, \quad x \in X.$$

ilə bu limitin sonlu olduğu bütün mümkün idarəetmələr çoxluğunu işarə edək. Mümkün idarəetmələr sinfində  $I_1(x)$  funksionalının minimallaşdırılması məsələsinə baxılır:

$$I_1(x) \rightarrow \min, \quad x \in G. \quad (1)$$

**Qeyd 1.** Bu minimallaşdırma məsələsinin sadə şəkli [3,4] işlərində rast gəlinir. Belə ki, müəyyən kütləvi xidmət sistemlərində tələblərin orta gözləmə müddətinin xidmətin əvvəlində eyni qanunla paylanmış, asılı olmayan gecikmələr daxil etməklə minimallaşdırması məsələsi (1)-in xüsusi halına gətirilərək,

$$I_1(x) = E(\xi + x + \eta)^2 \rightarrow \min.$$

şəklində ortaya çıxır. Əgər xidmətin əvvəlində müxtəlif qanunla paylanmış gecikmələr daxil edilərsə, onda (1) məsələsi alınır.

(1) məsələsini cəm sonlu olduqda qabarıq analizin üsullarından istifadə etməklə həll etmək olar[1]. (1) halında isə başqa üsullardan istifadə etmək lazımdır. (1) məsələnin həlli aşağıdakı ayrılışdan alınır:

$$I_1(x) = I_1(\bar{x}) + \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N E(\xi_k + \bar{x}_k + \eta_k)(x_k - \bar{x}_k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(x_k - \bar{x}_k)^2 \right).$$

$x, \bar{x}$  idarəetmələrinin  $G$  çoxluğundan olmasından sağ tərəfdəki limitin sonlu olması çıxır.

**Teorem 1.**  $\bar{x}$ -nin optimal idarəetmə olması üçün kafi şərt ixtiyari  $x \in X$  üçün

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(\xi_k + \bar{x}_k + \eta_k)(x_k - \bar{x}_k) \geq 0 \quad (2)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

Teoremin isbatı üçün köməkçi lemmadan istifadə olunur.

**Lemma 1.**  $a_n, b_n$  ədədi ardıcılıqları üçün

$$\lim(a_n + b_n) = c, \underline{\lim} a_n = d, d \geq 0 \text{ və } b_n \geq 0$$

olarsa, onda  $c \geq 0$ .

Lemmanın isbatı asanlıqla

$$a_n + b_n \geq a_n$$

bərabərsizliyindən alınır.

Teorem 1-in isbatı aşkar şəkildə

$$a_N = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N E(\xi_k + \bar{x}_k + \eta_k)(x_k - \bar{x}_k),$$

$$b_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(x_k - \bar{x}_k)^2$$

götürməklə lemma 1-dən alınır. Optimal idarəetmənin formasını tapaq. (2)-də nəzərə alsaq ki, hər bir idarəetmə yalnız özündən əvvəl baş verən realizasiyalardan asılı ola bilər və sonrakı realizasiyalardan asılı deyil, (başqa sözlə,  $x_k, \bar{x}_k$  təsadüfi kəmiyyətləri  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_k$  - təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır,  $\eta_k$  - təsadüfi kəmiyyətdən asılı deyil), onda riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək, alarıq ki:

$$E(\xi_k + \bar{x}_k + \eta_k)(x_k - \bar{x}_k) = E(\xi_k + \bar{x}_k + E\eta_k)(x_k - \bar{x}_k).$$

Asanlıqla göstərmək olar ki,  $\bar{x}_k = (-\xi_k - E\eta_k)^+$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) idarəetməsi (2) bərabərsizliyini ödəyir və optimal idarəetmədir, burada  $z^+ = \max(0, z)$ . Optimal idarəetmə üçün funksionalın minimal qiyməti

$$I_1(\bar{x}) = E\left(\left(\xi_1 + E\eta_1\right)^+ + \eta_1 - E\eta_1\right)^2.$$

**2. Mürəkkəb hal.** Fərz edək ki, sistemdə asılı olmayan, sonlu ikinci tərtib momentlərə malik  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n, \dots$  təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilir:  $E\xi_n^2 < \infty, E\eta_n^2 < \infty$ . Yuxarıdakı qaydada  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  eyni bir  $F_1$  paylanmasına,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$  təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı da həmçinin eyni bir  $F_2$  paylanma-

sına malikdir. Sistemdə əks əlaqəli,  $(x, y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots)$  mənfi olmayan idarəetmələr ardıcılığı həyata keçirilir ki, realizasiyalar ardıcılığı

$$\xi_1 \rightarrow x_1 \rightarrow \eta_1 \rightarrow y_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow x_2 \rightarrow \eta_2 \rightarrow y_2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_n \rightarrow x_n \rightarrow \eta_n \rightarrow y_n -$$

şəklində olur. Burada da hər bir idarəetmə yalnız özündən əvvəl baş verən realizasiyalardan asılı ola bilər və sonrakı realizasiyalardan asılı deyil. Başqa sözlə,  $x_n$  təsadüfi kəmiyyəti  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n$  təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır,  $\eta_n, \xi_{n+1}, \eta_{n+1}, \dots$  təsadüfi kəmiyyətlərindən isə asılı deyil. Eyni qayda ilə  $y_n$  təsadüfi kəmiyyəti  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n$  təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır,  $\xi_{n+1}, \eta_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots$  təsadüfi kəmiyyətlərindən isə asılı deyil.

Sistemin effektivlik göstəricisi

$$I_2(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\alpha_1 E(\xi_k + x_k + \eta_k + y_k)^2 + \alpha_2 E(\eta_k + y_k + \xi_{k+1} + x_{k+1})^2], \quad (3)$$

burada  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ .

**Qeyd 2.** Bu funksional çoxterminallı kütləvi xidmət sistemlərində iki terminalda gecikmələrlə idarəetmə olan halda orta gözləmə müddətinin minimallaşdırılması zamanı alınır [5]. Burada sadə haldakı funksional (3)-ün xüsusi halıdır:

$$I_1(x) = I_2(x, 0).$$

$G$  ilə (3)-dəki limitlər sonlu olan bütün mümkün  $(x, y)$  idarəetmələr çoxluğunu işarə edirik. Mümkün idarəetmələr sinfində minimallaşdırma məsələsi aşağıdakı şəkildə olur:

$$I_2(x, y) \rightarrow \min, \quad (x, y) \in G.$$

**Teorem 2.**  $(\bar{x}, \bar{y}) \in G$  idarəetməsinin optimal olması üçün kafi şərt ixtiyari  $(x, y) \in G$  idarəetməsi üçün

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(\bar{y}_k + \alpha_1 \xi_k + \alpha_2 \xi_{k+1} + \eta_k + \alpha_1 \bar{x}_k + \alpha_2 \bar{x}_{k+1})(y_k - \bar{y}_k) \geq 0, \quad (4)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(\bar{x}_{k+1} + \alpha_2 \eta_k + \alpha_1 \eta_{k+1} + \xi_{k+1} + \alpha_2 \bar{y}_k + \alpha_1 \bar{y}_{k+1})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}) \geq 0$$

bərabərsizliklərinin ödənməsidir.

Teorem aşağıdakı ayrılışdan və yuxarıdakı teoremə uyğun olaraq analogi mühakimələrdən istifadə etməklə isbat olunur.

$$\begin{aligned}
I_2(x, y) - I_2(\bar{x}, \bar{y}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N E(\bar{y}_k + \alpha_1 \xi_k + \alpha_2 \xi_{k+1} + \eta_k + \alpha_1 \bar{x}_k + \alpha_2 \bar{x}_{k+1})(y_k - \bar{y}_k) + \right. \\
&+ \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N E(\bar{x}_{k+1} + \alpha_2 \eta_k + \alpha_1 \eta_{k+1} + \xi_{k+1} + \alpha_2 \bar{y}_k + \alpha_1 \bar{y}_{k+1})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}) + \\
&\left. + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \alpha_1 E(x_k - \bar{x}_k + y_k - \bar{y}_k)^2 + \alpha_2 E(y_k - \bar{y}_k + x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Optimal idarəetməni aşağıdakı üsulla tapa bilərik. (4) bərabərsizliklərində nəzərə alsaq ki, hər bir idarəetmə yalnız özündən əvvəl baş verən realizasiyalardan asılı ola bilər və sonrakı realizasiyalardan asılı deyil, yəni  $y_k, \bar{y}_k$  təsadüfi kəmiyyətləri  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_k, \eta_k$  təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır,  $\xi_{k+1}$  təsadüfi kəmiyyətinə isə asılı deyil, həmçinin  $x_{k+1}, \bar{x}_{k+1}$  təsadüfi kəmiyyətləri  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_k, \eta_k, \xi_{k+1}$  təsadüfi kəmiyyətlərindən asılıdır,  $\eta_{k+1}$  təsadüfi kəmiyyətinə isə asılı deyil, onda şərti riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə edərək alırıq:

$$E(\alpha_2 \xi_{k+1} + \alpha_2 \bar{x}_{k+1})(y_k - \bar{y}_k) = E(\alpha_2 E \xi_1 + \alpha_2 E(\bar{x}_{k+1} | K))(y_k - \bar{y}_k),$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$E(\alpha_1 \eta_{k+1} + \alpha_1 \bar{y}_{k+1})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}) = E(\alpha_1 E \eta_1 + \alpha_1 E(\bar{y}_{k+1} | K))(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}).$$

Burada aşağıdakı işarələmələr edilib:

$$\begin{aligned}
E(\bar{x}_{k+1} | K) &= E(\bar{x}_{k+1} | \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, \eta_k), \\
E(\bar{y}_{k+1} | K) &= E(\bar{y}_{k+1} | \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, \eta_k, \xi_{k+1}).
\end{aligned}$$

Başqa sözlə, bu şərti riyazi gözləmələr idarəetmələrin keçmiş realizasiyalara görə orta qiymətini ifadə edir. Buradan aşağıdakı tənliklər sistemi alınır:

$$\bar{y}_k = (-\alpha_1 \xi_k - \alpha_2 E \xi_1 - \eta_k - \alpha_1 \bar{x}_k - \alpha_2 E(\bar{x}_{k+1} | K))^+,$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$\bar{x}_{k+1} = (-\alpha_2 \eta_k - \alpha_1 E \eta_1 - \xi_{k+1} - \alpha_2 \bar{y}_k - \alpha_1 E(\bar{y}_{k+1} | K))^+.$$

Bu tənliklər sisteminin həllini analitik şəkildə tapmaq çətindir, çünki hər bir idarəetmə sonrakı idarəetmənin şərti riyazi gözləməsindən asılı olaraq təyin olunur və bu proses sonsuz olaraq davam edir. Ona görə də aşağıdakı idarəetməyə baxaq:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_k &= \begin{cases} 0, & k = j^2 \quad j = 1, 2, \dots \\ \bar{y}_k, & k \neq j^2 \quad j = 1, 2, \dots \end{cases}, \\
\hat{x}_k &= \bar{x}_k, & k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Buradan alırıq ki,

$$|I_2(\bar{x}, \bar{y}) - I_2(\hat{x}, \hat{y})| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M\sqrt{N}}{N} = 0,$$

yəni  $I(\bar{x}, \bar{y}) = I(\hat{x}, \hat{y})$ . Fərz edək ki, yuxarıdakı realizasiyalar ardıcılığı üçün  $\xi_k, x_k, \eta_k$  məlumdur,  $\bar{y}_k$ -ni tapmaq tələb olunur. Aydındır ki, elə  $j \in N$  nömrəsi var ki,

$$(j-1)^2 < k \leq j^2.$$

Şərtə görə  $\bar{y}_{j^2} = 0$  və tənliklər sistemi bu şəkildədir:

$$\bar{x}_{j^2} = \left( -\alpha_2 \eta_{j^2-1} - \alpha_1 E \eta_1 - \xi_{j^2} - \alpha_2 \bar{y}_{j^2-1} \right)^+, \quad (5)$$

$$\bar{y}_{j^2-1} = \left( -\alpha_1 \xi_{j^2-1} - \alpha_2 E \xi_1 - \eta_{j^2-1} - \alpha_1 \bar{x}_{j^2-1} - \alpha_2 E(\bar{x}_{j^2} | K) \right)^+, \quad (6)$$

$$\bar{x}_{j^2-1} = \left( -\alpha_2 \eta_{j^2-2} - \alpha_1 E \eta_1 - \xi_{j^2-1} - \alpha_2 \bar{y}_{j^2-2} - \alpha_1 (\bar{y}_{j^2-1} | K) \right)^+, \quad (7)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\bar{y}_k = \left( -\alpha_1 \xi_k - \alpha_2 E \xi_1 - \eta_k - \alpha_1 \bar{x}_k - \alpha_2 E(\bar{x}_{k+1} | K) \right)^+. \quad (8)$$

Bu tənliklər sistemini həll etmək üçün köməkçi lemmadan istifadə olunur.

**Lemma 2.** İxtiyari  $C$  sabiti və  $\gamma$  təsadüfi kəmiyyəti üçün

$$z = \left( C - E(\gamma - z)^+ \right)^+ \quad (9)$$

tənliyinin  $z$ -ə görə  $[0, |C|]$  parçasında ən azı bir həlli var.

**İsbatı.** Əgər  $C \leq 0$  və ya  $E\gamma^+ = \infty$  olarsa, onda  $z = 0$  tənliyin həlli olacaq.  $C > 0$  və  $E\gamma^+ < \infty$  olan hala baxaq. Burada

$$g(z) = z - \left( C - E(\gamma - z)^+ \right)^+$$

funksiyasının sıfır çevrildiyi nöqtəni tapmaq tələb olunur. Əgər nəzərə alsaq ki,  $g(z)$  funksiyası kəsilməzdir və  $[0, |C|]$  parçasının uclarında

$$g(0) = -\left( C - E\gamma^+ \right)^+ \leq 0,$$

$$g(|C|) = |C| - \left( C - E(\gamma - |C|)^+ \right)^+ \geq 0$$

əks işarəli qiymətlər alır, buradan lemmanın hökmünün doğru olduğu çıxır.

**Qeyd 3.** Əlbəttə ki, (9) inteqral tənliyini çox az hallarda analitik həll etmək olar. Bu tənliyi ədədi üsullarla, məsələn parçanın yarıya bölünməsi üsulu ilə həll etmək olar.

Lemma 2-yə görə (5) və (6) tənliklərindən  $\bar{y}_{j^2-1}$ -i tapmaq olar:

$$\bar{y}_{j^2-1} = f_1(\xi_{j^2-1}, \eta_{j^2-1}, \bar{x}_{j^2-1}). \quad (10)$$

Yenə lemma 2-yə görə (7) və (10) tənliklərindən  $\bar{x}_{j^2-1}$  -i tapmaq olar:

$$\bar{x}_{j^2-1} = f_2(\eta_{j^2-2}, \xi_{j^2-1}, \bar{y}_{j^2-2}).$$

Prosesi ardıcıl olaraq bu qayda davam etdirməklə axtarılan  $\bar{y}_k$  həlli tapılır.

**Qeyd 4.** Ədədi hesablamalar üçün tənliklərdə iştirak edən şərti riyazi gözləmələri təqribi olaraq aşağıdakı Monte-Karlo metodu ilə hesblamaq olar [2]. Belə ki, asılı olmayan  $\xi, \eta$  təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$E(g(\xi, \eta) | \eta) \Big|_{\eta=w} \approx \frac{g(z_1, w) + g(z_2, w) + \dots + g(z_n, w)}{n},$$

burada  $z_1, z_2, \dots, z_n$   $\xi$  təsadüfi kəmiyyətinin asılı olmayan realizasiyaları,  $w$  isə  $\eta$  təsadüfi kəmiyyətinin realizasiyasıdır.

**Qeyd 5.** Minimallaşdırma məsələsini  $m$  sayda idarəetmələr ardıcılığı üçün daha ümumi şəkildə qoymaq mümkündür. Analogi yolla tənliklər sistemi qurulur:

$$x_{j+1}^h = \left( f_{j+1}^h - \sum_{i=1}^{h-1} \left[ (1 - \sum_{l=i}^{h-1} \alpha_l) x_{j+1}^i + \sum_{l=i}^{h-1} \alpha_l E(x_{j+2}^i | K) \right] - \sum_{i=h+1}^m \left[ \sum_{l=h}^{i-1} \alpha_l x_j^i + (1 - \sum_{l=h}^{i-1} \alpha_l) E(x_{j+1}^i | K) \right] \right)^+,$$

$h = 1, 2, \dots, m$

burada

$$f_{j+1}^k = \left( - \sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{l=i+1}^{k-1} \alpha_l E \xi_1^i + (1 - \sum_{l=i+1}^{k-1} \alpha_l) \xi_{j+1}^i \right) - \sum_{i=k}^n \left( (1 - \sum_{l=k}^i \alpha_l) E \xi_1^i + \sum_{l=k}^i \alpha_l \xi_j^i \right) \right).$$

Bu tənliklər sistemini analogi şəkildə ədədi üsulla həll etmək mümkündür. Lakin bu çox böyük miqyasda hesablamalar tələb edir.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980, 142 с.
2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1971, 328 с.
3. Gadziev A.G. Delays reducing the waiting time in queuing system with cyclic services // Scand J Statist 12. 1985, p.301-307.
4. Гаджиев А.Г. Стохастические челночные системы // ДАН России, Математика, 2001, т.380 №5, с.583-585.
5. Mammadov T. Sh. Control problem in queuing system with three terminals// Proceedings of NASA, 27, 2007, p.173-180.

#### МИНИМИЗАЦИЯ КЛАССА ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПИСЫВАЮЩИХ СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Т.Ш. МАМЕДОВ

#### РЕЗЮМЕ

Рассматриваются задачи минимизации класса функционалов, описывающих среднее время ожидания в системах обслуживания. Найлены достаточные условия, мини-

мизирующие выбранный функционал, которые соответствуют оптимальному управлению в системах массового обслуживания. Находится явный вид оптимального управления для простого случая и строится система уравнений для оптимального управления в сложном случае, предлагается численный метод решения.

**MINIMIZATION PROBLEM OF A WIDE CLASS OF FUNCTIONALS,  
DESCRIBING AN EXPECTATION OF WAITING TIME IN QUEUES**

**T. Sh.MAMMADOV**

**SUMMARY**

Minimization problem of a wide class of functionals, describing an expectation of waiting time in queues is considered. Sufficient conditions corresponding to optimal control for queues for minimization of given functional are derived. For a simple case the form of the optimal control is found and for a difficult case the system of equations for the optimal control are established and the method of numerical calculations is presented.